TD5

SÉRIES, DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS.

Exercice 1 *Convergence de séries.*
Examiner la convergence des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{\ln(k)}{k}$.
2. $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{\sqrt{k}}{k+1}$.
3. $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{k-2}{k^3+3k-\ln(k)}$.
4. $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{e^{-\sqrt{k}}}{k}$.
5. $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \sqrt[k]{k+1}-\sqrt[k]{k}$.

   Indication : Trouver un équivalent du terme général avec l'IAF.

Exercice 2 *Développements limités.*
Déterminer le développement limité d'ordre 2 au voisinage de x_0 puis calculer la limite proposée :

1. $f(x)=\dfrac{4e^{x-2}}{x^2}$ en $x_0=2$ puis $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$.
   En déduire que f est dérivable en $x_0=2$ et déterminer $f'(2)$.
2. $g(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$ en $x_0=1$, puis $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{g(x)+1-x}{(x-1)^2}$.

Indication : se ramener en 0 par un changement de variable : $f(x)=f(2+h)=\ldots$ *et* $g(x)=g(1+h)=\ldots$

Exercice 3 *EMLyon 2009 Exercice 1.*
On note $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x\in\mathbb{R}$, par

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{e^x-1} & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}.$$

Partie I : Étude d'une fonction.

1. **a.** Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

   b. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$, et calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\,]-\infty,0[\,\cup\,]0,+\infty[$.

   c. Montrer que
   $$\lim_{x\to 0} f'(x)=\frac{-1}{2}.$$

   d. Établir que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.

ECG 2 Maths Appliquées, http://louismerlin.fr.

2. **a.** Étudier les variations de l'application $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$u(x) = (1-x)e^x - 1.$$

b. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) < 0$.

c. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$, puis dresser le tableau de variations de f.

d. Montrer que la courbe représentative de f admet une droite asymptote lorsque la variable tend vers $-\infty$.

e. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in N$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que f admet un point fixe et un seul, noté α, que l'on calculera.

2. **a.** Établir que, pour tout $x \in [0, +\infty[$, $e^{2x} - 2xe^x - 1 \geqslant 0$.

b. Montrer que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x}-2xe^x-1}{2(e^x-1)^2}$.

c. Montrer que tout $x \in [0, +\infty[$, $-\frac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0$.

d. Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

3. En déduire que pour tout $n \in N$, $|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}(1-\alpha)$.

4. Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

5. Écrire un programme en Scilab qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$.

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale.
On note $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, l'application définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$G(x) = \int_x^{2x} f(t)dt.$$

1. Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G(x) = \begin{cases} \frac{x(3-e^x}{e^{2x}-1} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}.$$

2. **a.** Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $0 \leqslant G(x) \leqslant xf(x)$.
En déduire la limite de G en $+\infty$.

b. Montrer que pour tout $x \in]-\infty, 0]$, $G(x) \leqslant xf(x)$.
En déduire la limite de G en $-\infty$.

3. Dresser le tableau de variations de G. On n'essaiera pas de calculer $G(\ln 3)$.

Exercice 4

Dans tout l'exercice, on considère

- La fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par
$$f(x) = \frac{x}{(x+1)^2};$$
- La fonction F définie sur $]-1, +\infty[$ par
$$F(x) = \int_0^x f(t)dt;$$
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = f(u_n)$.

Partie I : étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Déterminer les variations de f, présentées sous forme d'un tableau.

Partie II : Étude de la fonction F.

1. Justifier que F est bien définie sur $]-1,+\infty[$ et que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition.
2. À l'aide du changement de variables $u = t + 1$, montrer que pour tout $x > -1$,
$$F(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}.$$
3. À l'aide d'équivalents, déterminer les limites de F aux bornes de son ensemble de définition.
4. **a.** Étudier la concavité de F. On montrera notamment que F admet un point d'inflexion dont on précisera les coordonnées.
   b. Montrer que pour tout $x > -1$ et non nul, on a $F(x) > 0$.
5. Rappeler les développements limités d'ordre 2 en 0 de $\ln(1+x)$ et de $\frac{1}{1+x}$. En déduire le développement limité de F à l'ordre 2 en 0.
6. Préciser l'équation de la tangente à la courbe F en 0, et leurs positions relatives.
7. Représenter l'allure de la courbe représentative de F ainsi que, sur le même graphique, la tangente en 0.

Partie III : Étude la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < u_n \leqslant \frac{1}{n}$.
3. En déduire la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers une limite à préciser.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$.
   a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$2 \leqslant v_n \leqslant 2 + \frac{1}{n}.$$
   b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$2(n+1) \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant 2(n+1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$
5. **a.** Montrer que pour tout entier $k \geqslant 2$, $\frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$.
   b. En déduire que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln n.$$
6. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.
7. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.